Махер Ахмед (Казань)

Задача о скачке для уравнения Гельмгольца в слоистых средах

Важным направлением в электродинамике является изучение волновых процессов в слоистых средах [1], [2]. Скалярная задача о рассеянии электромагнитных волн на многослойной диэлектрической структуре может быть сформулирована как задача о скачке для уравнения Гельмгольца: в каждом слое нужно найти решение уравнения Гельмгольца с кусочно-постоянным коэффициентом при условии, что на линиях раздела сред заданы скачки искомого решения и его нормальной производной. В неограниченных областях искомое решение должно удовлетворять дополнительно условию излучения.

В данной работе рассмотрена задача о скачке для уравнения Гельмгольца для двух частных случаев слоистых сред: когда отдельные слои разделены параллельными прямыми (плоскослоистая среда) и когда слои разделены концентрическими окружностями (осесимметричная среда). Предварительно построены аналитические решения вспомогательных задач Коши для уравнения Гельмгольца в отдельных слоях, при этом использован метод интегрального преобразования Фурье в классах распределений (обобщенных функций) медленного роста на бесконечности.

В задаче Коши на границе области задаются значения искомого решения и его нормальной производной. Как известно, задача Коши для уравнения Гельмгольца является переопределенной: ее решение существует только в том случае, когда граничные функции удовлетворяют некоторому условию. Показано, что это условие в наиболее простой форме может быть записано для образов Фурье граничных функций, а условие излучения для неограниченных областей может быть представлено в таком же виде.

Задача Коши для уравнения Гельмгольца в случае полуплоскости и полуполосы (при нулевых граничных условиях на параллельных сторонах), а также задача о скачке на стыке двух полуплоскостей или полуполос аналогичным методом изучались ранее в [3] и [4].

1. Задача о скачке в плоскослоистой среде.

Пусть $h_1 < h_2 < \ldots < h_n$. Прямые $z = h_j$ разделяют плоскость (x, z) на области: полуплоскости $D_0 : \; z < h_1$, $D_n : \; z > h_n$ и полосы $D_j : \; h_j < z < h_{j+1}$, $j = 1..n-1$. В каждой из областей D_j найти решения уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_j^2 u(x, z) = 0, \quad (x, z) \in D_j, \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям

$$u(x, h_j + 0) - u(x, h_j - 0) = a_j(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, h_j + 0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x, h_j - 0) = b_j(x), \tag{2}$$
$$j = 1..n.$$

здесь k_j – вещественные числа.

Доопределим функции $u_j(x, z)$ нулем вне областей D_j. Будем искать решения задачи в классе распределений медленного роста на бесконечности. Чтобы были корректно определены следы произвольных распределений $u_j(x, z)$ и их производных по z на границах $z = h_j$ областей D_j, эти распределения должны принадлежать пространствам Соболева $H_s(D_j)$, $s > 3/2$ [5], гл. I, §3. Но для решений уравнения Гельмгольца достаточно считать, что $s = 1$ (см. [6]). После того, как будут получены формулы, дающие решения рассматриваемых задач, можно показать, что при гладких граничных функциях обобщенные решения совпадают с классическими.

Будем говорить, что решение задачи (1), (2) в областях D_0 и D_n принадлежит классу уходящих на бесконечность решений или классу приходящих с бесконечности решений в зависимости от того, какие распространяющиеся плоские волны присутствуют в выражениях

$$u_j(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_j(\xi, \zeta) \, e^{-i\xi x} \, e^{-i\zeta z} \, d\xi \, d\zeta \tag{3}$$

при $j = 0$ и при $j = n$, где $U_j(\xi, \zeta)$ - образ Фурье распределения $u_j(x, z)$. Решение задачи (1), (2) удовлетворяет условию излучения, если это решение в областях D_0 и D_n принадлежит классу уходящих на бесконечность решений.

Пусть в разрезанной по отрезку $[-k_j, +k_j]$ комплексной плоскости ξ выбрана однозначная ветвь аналитической функции

$$\gamma(\xi) = \sqrt{k_j^2 - \xi^2},$$

принимающая положительные значения на верхнем береге разреза. Обозначим

$$\gamma_j^+(\xi) = \begin{cases} \xi < -k_j & : \quad i\sqrt{\xi^2 - k_j^2}; \\ -k_j < \xi < +k_j & : \quad \sqrt{k_j^2 - \xi^2}; \\ \xi > k_j & : \quad -i\sqrt{\xi^2 - k_j^2} \end{cases}$$

ее предельное значение из верхней полуплоскости на вещественной оси и

$$\gamma_j^0(\xi) = \left\{ |\xi| > k_j \ : \ +i\sqrt{\xi^2 - k_j^2}; \quad |\xi| < k_j : -\sqrt{k_j^2 - \xi^2} \right\}.$$

Лемма 1 . *Распределение $u_n(x, z)$ является решением уравнения (1) в области D_n, удовлетворяет граничным условиям*

$$u_n(x, h_n + 0) = u_n^+(x), \quad \frac{\partial u_n}{\partial z}(x, h_n + 0) = v_n^+(x) \tag{4}$$

и принадлежит классу уходящих на бесконечность решений тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$V_n^+(\xi) - i\gamma_n^0(\xi)\, U_n^+(\xi) = 0. \tag{5}$$

При этом $U_n(\xi, \zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(k_n^2 - \xi^2 - \zeta^2)\, U_n(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ih_n\zeta} \left[V_n^+(\xi) - i\zeta U_n^+(\xi)\right]. \tag{6}$$

Если вместо (5) взять условие

$$V_n^+(\xi) + i\gamma_n^0(\xi)\, U_n^+(\xi) = 0,$$

то получим решение задачи Коши в классе приходящих с бесконечности решений.

Лемма 2 . *Распределение $u_0(x,z)$ является решением уравнения (1) в области D_0, удовлетворяет граничным условиям*

$$u_0(x, h_1 - 0) = u_1^-(x), \quad \frac{\partial u_0}{\partial z}(x, h_1 - 0) = v_1^-(x) \tag{7}$$

и принадлежит классу уходящих на бесконечность решений тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$V_1^-(\xi) + i\gamma_0^0(\xi)\, U_1^-(\xi) = 0. \tag{8}$$

При этом $U_0(\xi,\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(k_0^2 - \xi^2 - \zeta^2)\, U_0(\xi,\zeta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ih_1\zeta}\, \left[V_1^-(\xi) - i\zeta U_1^-(\xi)\right]. \tag{9}$$

Лемма 3 . *Распределение $u_j(x,z)$ является решением уравнения (1) в области D_j, $j = 1..n-1$ и удовлетворяет граничным условиям*

$$\begin{array}{ll} u_j(x, h_j + 0) = u_j^+(x), & \frac{\partial u_j}{\partial z}(x, h_j + 0) = v_j^+(x), \\ u_j(x, h_{j+1} - 0) = u_{j+1}^-(x), & \frac{\partial u_j}{\partial z}(x, h_{j+1} - 0) = v_{j+1}^-(x) \end{array} \tag{10}$$

тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$[V_j^+(\xi) - i\gamma_j^0(\xi)U_j^+(\xi)] - e^{+i\Delta h_j\gamma_j^0(\xi)}\,[V_{j+1}^-(\xi) - i\gamma_j^0(\xi)U_{j+1}^-(\xi)] = 0, \tag{11}$$

$$e^{+i\Delta h_j\gamma_j^0(\xi)}\,[V_j^+(\xi) + i\gamma_j^0(\xi)U_j^+(\xi)] - [V_{j+1}^-(\xi) + i\gamma_j^0(\xi)U_{j+1}^-(\xi)] = 0, \tag{12}$$

где $\Delta h_j = h_{j+1} - h_j$. При этом $U_j(\xi,\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(k_j^2 - \xi^2 - \zeta^2)\, U_j(\xi,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{+ih_j\zeta}\, \left[V_j^+(\xi) - i\zeta U_j^+(\xi)\right] - \tag{13}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{+ih_{j+1}\zeta}\, \left[V_{j+1}^-(\xi) - i\zeta U_{j+1}^-(\xi)\right].$$

Непосредственно из лемм 1 - 3 следует

Теорема 2 . *Образы Фурье решения задачи о скачке в плослослоистой среде в областях D_j определяются из уравнений (6), (9) и (13), в которых образы Фурье граничных распределений $V_j^\pm(\xi), U_j^\pm(\xi)$ удовлетворяют системе уравнений (5), (8), (11), (12) и*

$$U_j^+(\xi) - U_j^-(\xi) = A_j(\xi), \quad V_j^+(\xi) - V_j^-(\xi) = B_j(\xi), \quad j = 1..n. \tag{14}$$

Действительно, будем искать решения задачи о скачке в областях D_j как решения переопределенных задач Коши для полуплоскостей или полос. Образы Фурье граничных распределений должны удовлетворять условиям лемм 1 – 3. Из граничных условий (2) после преобразования Фурье получим равенства (14).

Заметим, что в общем случае решение задачи о скачке не единственно. Однородная задача о скачке может иметь ненулевые решения, им соответствуют собственные волны многослойных диэлектрических структур. Хорошо известный пример – собственные волны планарного диэлектрического волновода [7].

2. Осесимметричная слоистая среда.

Пусть $R_1 < R_2 < \ldots < R_n$. Окружности $r = R_j$ разделяют плоскость (r, α) на области: круг $D_0 : \ r < R_1$, кольца $D_j : \ R_j < r < R_{j+1}, \ j = ..n-1$ и внешность круга $D_n : \ r > R_n$. Задача о скачке состоит в следующем: в каждой из областей D_j найти решения уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + k_j^2 u(r, \alpha) = 0, \quad (r, \alpha) \in D_j, \tag{15}$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} u(R_j + 0, \alpha) - u(R_j - 0, \alpha) = a_j(\alpha), \\ \frac{\partial u}{\partial r}(R_j + 0, \alpha) - \frac{\partial u}{\partial r}(R_j - 0, \alpha) = b_j(\alpha), \\ j = 1..n, \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \end{gathered} \tag{16}$$

Будем считать, что k_j - вещественные числа.

Как известно (см., например, [8]), двойное преобразование Фурье в плоскости (x, y) при переходе к полярным координатам (r, α) сводится к разложению функции в ряд Фурье по переменной α и к интегральному преобразованию Ханкеля по переменной r.

Пусть преобразование Ханкеля определено формулой

$$(H_\nu f)(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} f(r) J_\nu(r\rho) r dr, \tag{17}$$

при $\nu > -1/2$, тогда обратное преобразование (формула обращения)

$$(H_\nu^{-1} g)(r) = \int_0^{+\infty} g(\rho) J_\nu(\rho r) \rho d\rho. \tag{18}$$

Для достаточно гладких на $(0, +\infty)$ функций имеет место формула коммутации

$$H_\nu \left[f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right] = -\rho^2 H_\nu f. \tag{19}$$

Будем искать решения задач Коши для уравнения Гельмгольца (15) в каждой из областей D_j, используя преобразование Ханкеля в пространствах распределений медленного роста [9], [10].

Получим формулу коммутации вида (19) в случае, когда все производные в дифференциальном операторе понимаются в обобщенном смысле.

Лемма 4 . *Если $f(r)$ - дважды непрерывно дифференцируемая на $(0, R)$ и $(R, +\infty)$ функция и существуют конечные пределы у $f(r)$ и $f'(r)$ в точке R, то*

$$H_\nu \left[f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right] (\rho) = -\rho^2 (H_\nu f)(\rho) -$$

$$-[f'(R+0) - f'(R-0)]\, R\, J_\nu(R\rho) + [f(R+0) - f(R-0)]\, R\, \rho\, J'_\nu(R\rho). \tag{20}$$

Доказательство. Как известно, связь между классическими и обобщенными производными функции $f(r)$, имеющей разрывы первого рода (у самой функции и у первой производной) в точке $r = R$, устанавливают равенства

$$f'(r) = f'(r) - [f(R+0) - f(R-0)]\, \delta(r-R),$$

$$f''(r) = f''(r) - [f(R+0) - f(R-0)]\, \delta'(r-R) -$$
$$-[f'(R+0) - f'(R-0)]\, \delta(r-R),$$

здесь слева стоят классические производные, а справа – обобщенные. Вычислив преобразования Ханкеля δ-функции и ее производных, получим формулу (20).

Аналогами лемм 1–3 являются следующие утверждения.

Лемма 5 . *Распределение*

$$u_0(r,\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_{0m}(r) e^{im\alpha}$$

является решением уравнения (15) в области D_0 *и удовлетворяет граничным условиям*

$$u_0(R_1-0,\alpha) = u_0^-(\alpha), \quad \frac{\partial u_0}{\partial r}(R_1-0,\alpha) = v_0^-(\alpha) \tag{21}$$

тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье граничных функций удовлетворяют равенствам

$$-v_{1,m}^- R_1 J_n(R_1 k) + u_{1,m}^- R_1 k J_n'(R_1 k) = 0. \tag{22}$$

При этом

$$(k^2-\rho^2)\,(H_n u_{0,m})(\rho) = -v_{1,m}^- R_1 Jn(R_1\rho) + u_{1,m}^- R_1 \rho J_n'(R_1\rho) \tag{23}$$

Лемма 6 . *Распределение* $u_n(r,\alpha)$ *является решением уравнения (15) в области* D_n *и удовлетворяет граничным условиям*

$$u_n(R_n+0,\alpha) = u_n^+(\alpha), \quad \frac{\partial u_n}{\partial r}(R_n+0,\alpha) = v_n^+(\alpha) \tag{24}$$

тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье граничных функций удовлетворяют равенствам

$$v_{n,m}^+ R_n J_n(-R_n k) + u_{n,m}^+ R_n k J_n'(-R_n k) = 0. \tag{25}$$

При этом

$$(k^2-\rho^2)\,(H_n u_{n,m})(\rho) = +v_{n,m}^+ R_n J_n(R_n\rho) - u_{n,m}^+ R_n \rho J_n'(R_n\rho) \tag{26}$$

Лемма 7 . *Распределение* $u_j(r,\alpha)$ *является решением уравнения (15) в области* D_j, $j = 1..n-1$ *и удовлетворяет граничным условиям*

$$\begin{gathered} u_j(R_j+0,\alpha) = u_j^+(\alpha), \quad \frac{\partial u_j}{\partial r}(R_j+0,\alpha) = v_j^+(\alpha), \\ u_j(R_{j+1}-0,\alpha) = u_{j+1}^-(\alpha), \quad \frac{\partial u_j}{\partial r}(R_{j+1}-0,\alpha) = v_{j+1}^-(\alpha) \end{gathered} \tag{27}$$

тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье граничных функций удовлетворяют равенствам

$$
\begin{gathered}
-v^-_{j+1,m}\,R_{j+1}\,J_n(R_{j+1}k)+u^-_{j+1,m}\,R_{j+1}\,k\,J'_n(R_{j+1}k)+\\
+v^+_{j,m}\,R_j\,J_n(R_jk)-u^+_{j,m}\,R_j\,k\,J'_n(R_jk)=0,\\
-v^-_{j+1,m}\,R_{j+1}\,J_n(-R_{j+1}k)-u^-_{j+1,m}\,R_{j+1}\,k\,J'_n(-R_{j+1}k)+\\
+v^+_{j,m}\,R_j\,J_n(-R_jk)+u^+_{j,m}\,R_j\,k\,J'_n(-R_jk)=0.
\end{gathered}
\tag{28}
$$

При этом

$$
\begin{gathered}
(k^2-\rho^2)\,(H_nu_{j,m})(\rho)=\\
=-v^-_{j+1,m}\,R_{j+1}\,J_n(R_{j+1}\rho)+u^-_{j+1,m}\,R_{j+1}\,\rho\,J'_n(R_{j+1}\rho)+\\
+v^+_{j,m}\,R_j\,J_n(R_j\rho)-u^+_{j,m}\,R_j\,\rho\,J'_n(R_j\rho)=0.
\end{gathered}
\tag{29}
$$

Доказательство. Дополним решение уравнения (15) в кольце D_j нулем до всей плоскости и будем рассматривать его как распределение медленного роста. Перейдем в (15) к образу Фурье по двум переменным, то есть разложим левую и правую часть в ряды Фурье по переменной α и выполним преобразование Ханкеля по переменной r, используя формулу (20). Получим для образов Ханкеля коэффициентов Фурье искомого решения уравнения (29).

Левая часть уравнений (29) обращается в нуль при $\rho=\pm k$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (28).

Наконец, имеет место

Теорема 3 . *Образы коэффициентов Фурье решения задачи о скачке в слоистой осесимметричной среде в областях D_j определяются из уравнений (23), (26) и (29), в которых коэффициенты Фурье граничных распределений $v^{\pm}_{j,m}(\alpha), u^{\pm}_{j,m}(\alpha)$ удовлетворяют системе уравнений (22), (25), (28) и*

$$
u^+_{j,m}(\alpha)-u^-_{j,m}(\alpha)=a_{j,m}(\alpha),\quad v^+_{j,m}(\alpha)-v^-_{j,m}(\alpha)=b_{j,m}(\alpha),\quad j=1..n.
\tag{30}
$$

Литература

[1] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973.

[2] Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

[3] Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. The Cauchy problem and potentials for elliptic partial differential equations and some of their applications // Advances in Equations and Inequalities (A.E.I.) (ed. J.M. Rassias). – Athens, Greece, 1999.

[4] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций // Препринт 2000-1. Казанское матем. об-во. – Казань, 2000. – 50 с.

[5] Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – М.: Наука. 1984. – 360 с.

[6] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). – М.: ИПРЖР, 1996.

[7] Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. – М.: Мир, 1984.

[8] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.

[9] Земанян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1974.

[10] Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977.